Prevod primera iz: *ISO TAG 4, ISO WG 3; Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement; ISO, October 1995.; PP 76*

H.3 Etaloniranje termometra

Ovaj primer prikazuje korišćenje metode najmanjih kvadrata za dobijanje linearne krive etaloniranja i kako se parametri usaglašene {eng. *fited*} funkcije, presek i koeficijent pravca, kao i njena procenjena varijansa i kovarijansa, upotrebljavaju za dobijanje vrednosti i standardne nesigurnosti predviđene korekcije iz krive etaloniranja.

H.3.1 Merni problem

Termometar je etaloniran upoređivanjem $n = 11$ očitavanja temperature t_k termometra, od kojih svako ima beznačajnu nesigurnost, sa odgovarajućom poznatom referentnom vrednošću $t_{R,k}$ u opsegu temperatura 21 ºC do 27 ºC za dobijanje vrednosti korekcije očitavanja $b_k = t_{R,k} - t_k$. <u>Izmerene</u> vrednosti korekcije b_k i <u>izmerene</u> temperature t_k su ulazne veličine procene. Linearna kriva etaloniranja

$$b(t) = y_1 + y_2(t - t_0) \qquad \ldots(H.12)$$

je usaglašena sa izmerenim vrednostima korekcija i temperatura metodom najmanjih kvadrata. Parametri y_1 i y_2, koji su presek i koeficijent pravca, redom, su dve merene veličine ili izlazne veličine koje treba odrediti. Za temperaturu t_0 je pogodno izabrati tačnu referentnu temperaturu; to nije nezavisan parametar koji treba odrediti usaglašanjem metodom najmanjih kvadrata. Kada se jednom nađu y_1 i y_2, sa svojim procenjenim varijansama i kovarijansama, jednačina (H.12) se može koristiti za predviđanje vrednosti i standardne nesigurnosti korekcije koja će se primenjivati na termometar za bilo koju vrednost t temperature.

H.3.2 Usaglašavanje metodom najmanjih kvadrata

Na osnovu metode najmanjih kvadrata i uz pretpostavke date u H.3.1 gore, minimizovanjem sume

$$S = \sum_{k=1}^{n} \left[b_k - y_1 - y_2(t_k - t_0)\right]^2$$

dobijene su izlazne veličine y_1 i y_2 i njihove procenjene varijanse i kovarijanse. To daje sledeće jednačine za y_1, y_2, njihove eksperimentalne varijanse $s^2(y_1)$ i $s^2(y_2)$, i njihov procenjeni koeficijent korelacije $r(y_1, y_2) = s(y_1, y_2) / s(y_1)\, s(y_2)$, gde je $s(y_1, y_2)$ njihova procenjena kovarijansa:

$$y_1 = \frac{(\sum b_k)(\sum \theta_k^2) - (\sum b_k\theta_k)(\sum \theta_k)}{D} \qquad ..(H.13a)$$

$$y_2 = \frac{n\sum b_k\theta_k - (\sum b_k)(\sum \theta_k)}{D} \qquad \ldots(H.13b)$$

$$s^2(y_1) = \frac{s^2 \sum \theta_k^2}{D} \qquad \ldots(H.13c)$$

$$s^2(y_2) = n\,\frac{s^2}{D} \qquad \ldots(H.13d)$$

$$r(y_1, y_2) = -\frac{\sum \theta_k}{\sqrt{n\sum \theta_k^2}} \qquad \ldots(H.13e)$$

$$s^2 = \frac{\sum \left[b_k - b(t_k)\right]^2}{n-2} \qquad \ldots(H.13f)$$

$$D = n\sum \theta_k^2 - (\sum \theta_k)^2 = \\ = n\sum(\theta_k - \overline{\theta})^2 = n\sum(t_k - \overline{t})^2 \qquad \ldots(H.13g)$$

gde su sve sume od $k = 1$ do n, $\theta_k = t_k - t_0$, $\overline{\theta} = (\sum \theta_k)/n$, i $\overline{t} = (\sum t_k)/n$; $[b_k - b(t_k)]$ je razlika između izmerene, ili vrednosti promatranja, vrednosti korekcije b_k na temperaturi t_k i vrednosti korekcije $b(t_k)$ predviđene usaglašenom krivom $b(t) = y_1 + y_2(t - t_0)$ na t_k. Varijansa s^2 je mera ukupne nesigurnosti usaglašavanja, gde faktor $n - 2$ odražava činjenicu da su dva parametra, y_1 i y_2, određena iz n promatranja, stepen slobode s^2 je $\nu = n - 2$ (videti G.3.3).

H.3.3 Izračunavanje rezultata

Podaci koje je potrebno usaglasiti dati su u drugoj i trećoj koloni tabele H.6. Uzimanjem $t_0 = 20$ ºC za referentnu temperaturu, korišćenjem jednačina (H.13a) do (H.13g) dobijamo

$y_1 = -0{,}1712$ ºC	$s(y_1) = 0{,}0029$ ºC
$y_2 = 0{,}002\ 18$	$s(y_2) = 0{,}000\ 67$
$r(y_1, y_2) = -0{,}930$	$s = 0{,}0035$ ºC

Činjenica da je koeficijent pravca y_2 više od tri puta veći od njegove standardne nesigurnosti donekle ukazuje da je potrebna kriva etaloniranja a ne konstantna prosečna vrednost korekcije.

Kriva etaloniranja se tada može pisati kao

$$b(t) = -0{,}1712(29)\ ^{\circ}\mathrm{C} + 0{,}002\,18(67)\,(t - 20\ ^{\circ}\mathrm{C}) \quad \ldots(\mathrm{H}.14)$$

gde su brojevi u zagradama brojčane vrednosti standardnih nesigurnosti koje se odnose na odgovarajuće cifre najmanjih težina navedenih rezultata preseka i koeficijenta pravca (videti 7.2.2). Ova jednačina daje predviđenu vrednost korekcije $b(t)$ za bilo koju temperaturu t, i posebno vrednost $b(t_k)$ na $t = t_k$. Te vrednosti su date u četvrtoj koloni tabele dok poslednja kolona daje razliku između izmerene i predviđene vrednosti, $b_k - b(t_k)$. Analiza tih razlika može se koristiti za kontrolu valjanosti linearnog modela; postoji i formalan test, ali nije razmotren u ovom primeru (videti referencu [8] {*Fuller, W. A.; Measurement error models; John Wiley, New York, 1987.*}).

H.3.4 Nesigurnost predviđene vrednosti

Izraz za kombinovanu standardnu nesigurnost predviđene vrednosti korekcije može se lako dobiti primenjivanjem zakona prostiranja nesigurnosti, jednačina (16) u 5.2.2, do jednačine (H.12). Uočavanjem da je $b(t) = f(y_1, y_2)$ i pisanjem $u(y_1) = s(y_1)$ i $u(y_2) = s(y_2)$, dobija se

$$u_c^2[b(t)] = u^2(y_1) + (t - t_0)^2\, u^2(y_2) + 2\,(t - t_0)\, u(y_1)\, u(y_2)\, r(y_1, y_2) \quad \ldots(\mathrm{H}.15)$$

Procenjena varijansa $u_c^2[b(t)]$ je najmanja na $t_{min} = t_0 - u(y_1)\, r(y_1, y_2) / u(y_2)$, što je u ovom slučaju $t_{min} = 24{,}0085\ ^{\circ}\mathrm{C}$.

Kao primer korišćenja jednačine (H.15), razmotrimo određivanje vrednosti korekcije termometra i njene nesigurnosti na $t = 30\ ^{\circ}\mathrm{C}$, što je van opsega temperature u kome je termometar stvarno etaloniran. Smenom $t = 30\ ^{\circ}\mathrm{C}$ u jednačini (H.14) dobija se

$$b(30\ ^{\circ}\mathrm{C}) = -0{,}1494\ ^{\circ}\mathrm{C}$$

pri čemu jednačina (H.15) postaje

$$u_c^2[b(30\ ^{\circ}\mathrm{C})] = (0{,}0029\ ^{\circ}\mathrm{C})^2 + (10\ ^{\circ}\mathrm{C})^2\,(0{,}000\,67)^2 + 2\,(10\ ^{\circ}\mathrm{C})\,(0{,}0029\ ^{\circ}\mathrm{C})\,(0{,}000\,67)\,(-0{,}930) = 17{,}1 \times 10^{-6}\ ^{\circ}\mathrm{C}^2$$

ili

$$u_c[b(30\ ^{\circ}\mathrm{C})] = 0{,}0041\ ^{\circ}\mathrm{C}$$

Dakle vrednost korekcije na 30 ºC je -0,1494 ºC, sa kombinovanom standardnom nesigurnosti $u_c = 0{,}0041\ ^{\circ}\mathrm{C}$, i sa u_c koje ima stepen slobode $\nu = n - 2 = 9$.

H.3.5 Otklanjanje korelisanosti između koeficijenta pravca i preseka

Jednačina (H13.e) za koeficijent korelacije $r(y_1, y_2)$, pokazuje da ako je t_0 izabrano tako da je $\sum_{k=1}^{n} \theta_k = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_0) = 0$, onda je $r(y_1, y_2) = 0$, a y_1 i y_2 će biti nekorelisani, i time uprostiti izračunavanje standardne nesigurnosti predviđene vrednosti korekcije.

Kako je $\sum_{k=1}^{n} \theta_k = 0$ kada je $t_0 = \bar{t} = (\sum_{k=1}^{n} t_k)/n$, a u ovom slučaju je $\bar{t} = 24{,}0085\ ^{\circ}\mathrm{C}$, ponavljanje usaglašavanja metodom najmanjih kvadrata sa $t_0 = \bar{t} = 24{,}0085\ ^{\circ}\mathrm{C}$ dalo bi vrednosti y_1 i y_2 koje su nekorelisane. (Temperatura $\bar{t}$ je takođe temperatura na kojoj je najmanje $u^2[b(t)]$ – videti H.3.4) Međutim, ponavljanje usaglašavanja je nepotrebno jer se može pokazati da je

$$b(t) = y_1' + y_2(t - \bar{t}) \quad \ldots(\mathrm{H}.16a)$$

$$u_c^2[b(t)] = u^2(y_1') + (t - \bar{t})^2\, u^2(y_2) \quad \ldots(\mathrm{H}.16b)$$

$$r(y_1', y_2) = 0 \quad \ldots(\mathrm{H}.16c)$$

gde je

$$y_1' = y_1 + y_2(\bar{t} - t_0)$$

$$\bar{t} = t_0 - s(y_1)\, r(y_1, y_2) / s(y_2)$$

$$s^2(y_1') = s^2(y_1)\left[1 - r^2(y_1, y_2)\right]$$

a pri pisanju jednačine (H.16b) napravljena je smena $u(y_1') = s(y_1')$ i $u(y_2) = s(y_2)$ [videti jednačinu (H.15)].

Primenom ovih relacija na rezultat dat u H.3.3 dobija se

$$b(t) = -0{,}1625(11) + 0{,}002\,18(67)\,(t - 24{,}0085\ ^{\circ}\mathrm{C}) \quad \ldots(\mathrm{H}.17a)$$

$$u_c^2[b(t)] = (0{,}0011)^2 + (t - 24{,}0085\ ^{\circ}\mathrm{C})^2\,(0{,}000\,67)^2 \quad \ldots(\mathrm{H}.17b)$$

Da ovi izrazi daju iste rezultate kao jednačine (H.14) i (H.15) može se proveriti ponavljanjem izračunavanja $b(30\ ^{\circ}\mathrm{C})$ i $u_c^2[b(30\ ^{\circ}\mathrm{C})]$. Smena $t = 30\ ^{\circ}\mathrm{C}$ u jednačinama (H.17a) i (H.17b) daje

$$b(30\ ^oC) = -0{,}1494\ ^oC$$
$$u_c^2[b(30\ ^oC)] = 0{,}0041\ ^oC$$

što je identično rezultatu dobijenom u H.3.4. Procenjena kovarijansa između dve predviđene vrednosti korekcije $b(t_1)$ i $b(t_2)$ može se dobiti iz jednačine (H.9) u H.2.3.

H.3.6 Ostala razmatranja

Metoda najmanjih kvadrata može se koristiti za usaglašavanje krive etaloniranja višeg reda sa tačkama podataka, a takođe je primenljiva i na slučajeve kada pojedinačne tačke podataka imaju nesigurnost. O detaljima ovoga se može konsultovati standardni tekst [8]. Ipak se sledećim primerima prikazuju dva slučaja u kojima se izmerene vrednosti korekcije b_k ne uzimaju kao tačno poznate.

1) Neka svaki t_k ima beznačajnu nesigurnost, neka se svaka od n vrednosti $t_{R,k}$ dobija iz niza od m ponovljenih očitavanja, i neka s_p^2 bude objedinjena {eng. *pooled*} procena varijanse takvih očitavanja zasnovana na velikom broju podataka dobijenih u toku nekoliko meseci. Tada procenjena varijansa svakog $t_{R,k}$ iznosi $s_p^2 / m = u_0^2$ a svaka vrednost korekcije promatranja $b_k = t_{R,k} - t_k$ ima <u>istu</u> standardnu nesigurnost u_0. U tim okolnostima (i uz pretpostavku da nema razloga za verovanje da je linearan model neopravdan), u_0^2 zamenjuje s^2 u jednačinama (H.13c) i (H.13d).

PRIMEDBA - Objedinjena procena s_p^2 zasnovana na N nizova nezavisnih promatranja iste slučajno promenljive dobijena je iz

$$s_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \nu_i s_i^2}{\sum_{i=1}^{N} \nu_i}$$

gde je s_i^2 eksperimentalna varijansa i-tog niza od n_i nezavisnih ponovljenih promatranja [jednačina (4) u 4.2.2] i ima stepen slobode $\nu_i = n_i - 1$. Stepen slobode s_p^2 je $\nu = \sum_{i=1}^{N} \nu_i$.

Eksperimentalna varijansa s_p^2 / m (i eksperimentalna standardna devijacija $s_p / \sqrt{m}$) aritmetičke sredine m nezavisnih promatranja okarakterisanih objedinjenom procenom varijanse s_p^2 takođe ima stepen slobode ν .

2) Pretpostavimo da svaki t_k ima beznačajnu nesigurnost, da je vrednost korekcije ε_k primenjena na svaku od n vrednosti $t_{R,k}$, i da svaka korekcija ima istu standardnu nesigurnost u_a. Tada je standardna nesigurnost svakog $b_k = t_{R,k} - t_k$ takođe u_a, a $s^2(y_1)$ zamenjen je sa $s^2(y_1) + u_a^2$ i $s^2(y_1')$ zamenjen je sa $s^2(y_1') + u_a^2$.

Symmetry, GK 040327, 040404, 040409, 070830

Tabela H.6 – Podaci korišćeni za dobijanje linearne krive etaloniranja za termometar metodom najmanjih kvadrata

Broj očitavanja k	Očitavanje sa termometra t_k [°C]	Vrednost korekcije promatranja $b_k = t_{R,k} - t_k$ [°C]	Predviđena vrednost korekcije $b(t_k)$ [°C]	Razlika između vrednosti korekcije promatranja i predviđene korekcije $b_k - b(t_k)$ [°C]
1	21,521	-0,171	-0,1679	-0,0031
2	22,012	-0,169	-0,1668	-0,0022
3	22,512	-0,166	-0,1657	-0,0003
4	23,003	-0,159	-0,1646	+0,0056
5	23,507	-0,164	-0,1635	-0,0005
6	23,999	-0,165	-0,1625	-0,0025
7	24,513	-0,156	-0,1614	+0,0054
8	25,002	-0,157	-0,1603	+0,0033
9	25,503	-0,159	-0,1592	+0,0002
10	26,010	-0,161	-0,1581	-0,0029
11	26,511	-0,160	-0,1570	-0,0030